

Посвящается Максус с любовью

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие в вопросах и ответах	7
О чем эта книга?	7
Для кого эта книга?	7
Какие головоломки включены в книгу?	9
Подсказки, решения и комментарии	10
Что представляет собой учебный раздел?	11
Почему в книге два указателя?	11
Благодарности	12
Список головоломок	13
Головоломки учебного раздела	13
Головоломки основного раздела	14
Головоломка в качестве эпиграфа: кто это сказал?	18
Глава 1. Учебный раздел	19
Общие стратегии разработки алгоритмов	19
Методы анализа алгоритмов	42
Глава 2. Головоломки	55
Лёгкие головоломки	55
Головоломки средней сложности	68
Сложные головоломки	87
Глава 3. Подсказки	101
Глава 4. Решения	113
Лёгкие головоломки	113
Головоломки средней сложности	159
Сложные головоломки	232
Список литературы	304
Указатель головоломок, сгруппированных по методам разработки и анализа алгоритмов	315
Анализ	315
Инварианты	316
Поиск с возвратом	317
Уменьшай и властвуй	317
Разделяй и властвуй	319
Динамическое программирование	319
Полный перебор	319
Жадный подход	319
Итерационное улучшение	320
Преобразуй и властвуй	320
Другие методы	322
Предметно-именной указатель	323

ПРЕДИСЛОВИЕ В ВОПРОСАХ И ОТВЕТАХ

О ЧЕМ ЭТА КНИГА?

Эта книга представляет собой сборник алгоритмических головоломок — головоломок, для решения которых требуются, в явном или неявном виде, чётко определённые процедуры решения задач. Книга представляет собой уникальный сборник таких головоломок. В неё включены как старые классические задачи, вошедшие в фольклор математиков и специалистов по информатике, так и новые головоломки, которые предлагают решить во время собеседования в крупных компаниях при приёме на работу.

У этой книги есть две цели:

- ♦ развлечь широкий круг читателей, интересующихся головоломками;
- ♦ способствовать развитию алгоритмического мышления на высоком уровне (без компьютерного программирования) с помощью ознакомления с основными стратегиями разработки алгоритмов и методами анализа, которые были тщательно отобраны авторами.

Алгоритмы — это краеугольный камень информатики, и программирование без них невозможно. Однако было бы неправильно, как это делают многие, ставить знак равенства между алгоритмом и компьютерной программой. Некоторые алгоритмические головоломки старше компьютеров более чем на тысячу лет. Однако следует признать, что распространение компьютеров сделало доступным решение алгоритмических задач во многих областях современной жизни, от естественных и гуманитарных наук до искусства и индустрии развлечений. Решение алгоритмических головоломок — это наиболее продуктивный и уж точно самый приятный способ развить и улучшить навыки алгоритмического мышления.

ДЛЯ КОГО ЭТА КНИГА?

Эта книга может быть интересна для трёх больших категорий читателей:

- ♦ любителей головоломок;
- ♦ тех, кто хочет развить алгоритмическое мышление, в том числе учителей и учащихся;

- ♦ тех, кто готовится к собеседованию при приёме на работу, во время которого предлагают головоломки, а также тех, кто проводит эти собеседования.

Любителям головоломок понравится этот сборник, содержащий головоломки разных типов и тем. Они встретят как головоломки, любимые во все времена, так и малоизвестные «жемчужины». Никаких знаний по информатике или даже интереса к ней не требуется. Читатель, не обладающий такими знаниями, может просто пропустить описание стратегий разработки и анализа алгоритмов в разделе «Решения».

В последнее время термин «алгоритмическое мышление» очень часто употребляется преподавателями по информатике, и не без оснований: повсеместное распространение компьютеров в современном мире действительно делает необходимым овладение навыками алгоритмического мышления практически для каждого студента. Головоломки — идеальное средство для приобретения этих важных навыков в силу двух причин. Во-первых, головоломки — это занятно и человек обычно готов приложить больше усилий для решения головоломок, чем для решения обычных скучноватых упражнений. Во-вторых, алгоритмические головоломки заставляют мыслить на более абстрактном уровне. Даже студенты, обучающиеся информатике, чаще думают о решении алгоритмических задач в терминах компьютерного языка, который они знают, и не пытаются применить общие стратегии разработки и анализа алгоритмов. Головоломки помогают восполнить этот существенный недостаток.

Головоломки в этой книге, безусловно, можно использовать для самостоятельного обучения. Вместе с обучающим материалом они, на наш взгляд, позволяют ознакомиться с основными алгоритмическими понятиями и методами. Головоломки могут использовать и преподаватели компьютерных курсов как в университетах, так и в средней школе, в качестве вспомогательных упражнений и материала для проектов. Эта книга также может быть интересна для обучения на курсах по принятию решений, особенно на тех курсах, которые основаны на решении головоломок.

Для людей, готовящихся к собеседованию, эта книга будет полезна по двум причинам. Во-первых, в ней есть много примеров головоломок, с которыми они могут встретиться, с полным решением и комментариями. Во-вторых, в книге

содержится краткий учебный материал по стратегиям разработки и методам анализа алгоритмов. По словам менеджеров, предлагающих на собеседовании решить головоломки, для них в большей степени важно увидеть правильный подход к решению головоломки, а не само решение. На потенциального работодателя произведёт очень хорошее впечатление, если вы продемонстрируете ваш опыт в применении общих стратегий разработки алгоритмов.

КАКИЕ ГОЛОВОЛОМКИ ВКЛЮЧЕНЫ В КНИГУ?

Алгоритмические головоломки составляют малую часть среди тысяч математических головоломок, придуманных на протяжении многих лет. Подбирая головоломки для этой книги, мы руководствовались следующими критериями.

Во-первых, мы хотели, чтобы головоломки иллюстрировали некоторые общие принципы разработки и анализа алгоритмов.

Во-вторых, мы хотели, чтобы они были красивыми и элегантными, хотя эти качества, конечно, субъективны.

В-третьих, мы хотели, чтобы головоломки были различного уровня сложности. Сложность головоломки трудно точно определить; иногда головоломки, которые легко решают ученики средней школы, ставят в тупик профессоров математики. Тем не менее, мы поделили нашу книгу на три раздела — головоломки лёгкие, средней сложности и сложные — чтобы помочь читателю оценить уровень головоломки. В пределах каждого раздела мы также отсортировали головоломки по уровню сложности. Для решения головоломок из раздела «Лёгкие головоломки» нужна только математика средней школы. Для решения некоторых задач из следующих двух разделов применяется метод индукции, но в общем, чтобы решить все головоломки в книге, будет достаточно школьной математики. Кроме того, во второй части учебного раздела вкратце освещаются такие темы, как бинарные числа и простые рекуррентные соотношения. Конечно, это не означает, что все головоломки в книге — лёгкие. Некоторые из них — особенно в конце последнего раздела — являются по-настоящему сложными. Но их трудность вовсе не в том, что они требуют сложной математики, поэтому они не должны отпугивать читателя.

В-четвёртых, мы чувствовали себя обязанными включить несколько головоломок, имеющих историческое значение.

В заключение отметим, что мы включили в книгу головоломки только с ясной постановкой задачи и решением, избегая таких трюков, как преднамеренная двусмысленность, игра слов и т. д.

Нужно сделать ещё одно замечание. Многие головоломки из этой книги можно решить с помощью полного перебора или поиска с возвратом (эти стратегии описаны в первой части учебного раздела). Однако, это *не тот* подход, которым нужно наслаждаться при решении этих головоломок. Он требуется только в случаях, когда это специально указано. Поэтому мы исключили такие категории головоломок, как sudoku и криптарифмы, которые можно решить или полным перебором (перебором с возвратом), или же благодаря гениальной проницательности и озарению. Мы также решили не включать головоломки, относящиеся к физическим объектам, которые не очень легко описать, такие как Китайские кольца и кубик Рубика.

ПОДСКАЗКИ, РЕШЕНИЯ И КОММЕНТАРИИ

В книге для каждой головоломки приведены подсказка, решение и комментарии. Книжки по головоломкам редко включают подсказки, но мы считаем их ценным дополнением. Они могут слегка подтолкнуть в правильном направлении, оставляя, тем не менее, шанс читателю самому решить головоломку. Все подсказки собраны в отдельном разделе.

К каждой головоломке приведено решение. Как правило, оно начинается с короткого ответа. Это сделано для того, чтобы дать читателю последнюю возможность самому решить головоломку: если ответ читателя не тот, что в решении, он может прекратить чтение решения и попытаться снова решить головоломку.

Алгоритмы описаны без использования специального формата или псевдокода. Акцент делается на идеях, а не на незначительных деталях. Переписать решения в более формальном виде — это уже само по себе полезное упражнение.

Большинство комментариев обращают внимание на общую идею алгоритма, которую демонстрируют головоломка и её решение. Иногда в комментариях также есть ссылки на похожие головоломки из этой книги или из других источников.

В большинстве книг, посвящённых головоломкам, не указывается происхождение головоломки. Обычно это объясняется тем, что пытаться найти автора головоломки — всё равно, что

пытаться найти автора шутки. Хотя в этом и есть значительная доля правды, мы решили упомянуть о самых ранних источниках головоломок, которые нам известны. Однако читатель должен иметь в виду, что мы не производили хоть сколько-нибудь серьёзного поиска источников головоломок. Если бы мы это сделали, получилась бы совсем другая книга.

ЧТО ПРЕДСТАВЛЯЕТ СОБОЙ УЧЕБНЫЙ РАЗДЕЛ?

В книгу включён учебный раздел, где на примерах головоломок описаны общие стратегии разработки и методы анализа алгоритмов. Хотя почти все головоломки в книге можно решить без малейшего знания тем, освещённых в учебном разделе, вне сомнения он поможет решить головоломки гораздо легче и, что важно, с большей пользой. Кроме того, в решениях, комментариях и некоторых подсказках используется та же терминология, объяснение которой даётся в учебном разделе.

Учебный раздел написан на максимально доступном уровне, чтобы быть понятным широкому кругу читателей. Если читатель — специалист по информатике, то он вряд ли найдёт там для себя что-то новое, разве что примеры головоломок. В то же время, такой читатель может быстро освежить свои знания фундаментальных идей разработки и анализа алгоритмов.

ПОЧЕМУ В КНИГЕ ДВА УКАЗАТЕЛЯ?

В дополнение к стандартному указателю в книге есть ещё указатель, где головоломки сгруппированы по стратегии разработки или типу анализа соответствующего алгоритма. Этот указатель призван помочь читателю соотнести задачу с конкретной стратегией или методом решения, тем самым являясь дополнительной подсказкой.

Мы надеемся, что читатели найдут книгу как занимательной, так и полезной. Мы также надеемся, что они разделят наше восхищение красотой и удивительной человеческой изобретательностью, которые видны во многих головоломках этой книги.

Ананий Левитин, Мария Левитина
Май 2011 г.
algorithmicpuzzles.book@gmail.com

БЛАГОДАРНОСТИ

Мы хотели бы выразить нашу глубокую благодарность рецензентам книги: Тиму Шартье (Колледж Дэвидсона), Стивену Лукасу (Университет Джеймса Мэдисона) и Лоре Таалман (Университет Джеймса Мэдисона). Их горячая поддержка идеи книги и конкретные предложения по её содержанию были, безусловно, нам очень полезны.

Мы также благодарны Симону Берковичу из Университета Джорджа Вашингтона за обсуждение тем головоломок и за чтение части рукописи книги.

Мы благодарны всем сотрудникам издательства *Oxford University Press* и их коллегам, которые работали над книгой. Мы особенно благодарны нашему редактору Филлис Коэн за её неустанные усилия сделать книгу лучше. Мы также благодарим помощника редактора Халли Стеббинс, дизайнера обложки Наталью Балнову и менеджера по продажам Мишель Келли. Мы ценим работу Ричарда Кампа, редактора, подготовившего рукопись к печати, а также усилия Дженифер Коунинг и Кирана Кумара, которые отвечали за выпуск книги.

СПИСОК ГОЛОВОЛОМОК

ГОЛОВОЛОМКИ УЧЕБНОГО РАЗДЕЛА

Данный список содержит все головоломки, включённые в учебный раздел. Головоломки перечислены в том порядке, в котором они появляются в книге. Номер страницы указывает на ту страницу, где описана сама головоломка, а их решения даны непосредственно в учебном разделе, следом за формулировкой.

Магический квадрат	20
Задача об n ферзях	22
Задача о знаменитости	25
Угадай число (двадцать вопросов)	26
Головоломка «Тримино»	27
Поиск анаграмм	29
Конверты с банкнотами	29
Два ревнивых мужа	31
Головоломка Гуарини	32
Как оптимально разделить пирог	34
Неатакующие короли	35
Переход по мосту ночью	36
Где разместить киоск с лимонадом	37
Положительные изменения	39
Подсчёт кратчайших путей	40
Изобретение шахмат	44
Построение квадратов	45
Ханойская башня	46
Покрытие фигурами домино шахматных досок с дефектами	49
Задача о кёнигсбергских мостах	50
Разделить плитку шоколада	52
Цыплята в огороде	52

ГОЛОВОЛОМКИ ОСНОВНОГО РАЗДЕЛА

В этом списке указаны все 150 головоломок, включённых в основной раздел книги. Три номера после головоломки указывают на страницы, где приведены условие, подсказка и решение соответственно.

1. Волк, коза и капуста	55,	101,	113
2. Выбор перчаток	55,	101,	114
3. Разделение прямоугольника	55,	101,	114
4. Отряд солдат	55,	101,	115
5. Перестановки строк и столбцов	56,	101,	116
6. Счёт на пальцах	56,	101,	116
7. Переход по мосту ночью	56,	101,	117
8. Как собрать пазл?	56,	101,	118
9. Счёт в уме	57,	101,	119
10. Фальшивая монета из восьми	57,	101,	120
11. Столбик фальшивых монет	57,	101,	121
12. Можно ли замостить доску?	57,	101,	121
13. Преграждённые пути	57,	101,	122
14. Переделать шахматную доску	58,	102,	123
15. Замостить доску плитками тримино	58,	102,	124
16. Печём блины	58,	102,	125
17. Куда дойдёт король?	59,	102,	125
18. Проход из угла в угол шахматной доски	59,	102,	127
19. Нумерация страниц	59,	102,	127
20. Спуск с максимальной суммой	59,	102,	128
21. Разбиение квадрата	60,	102,	128
22. Упорядочение списка команд	60,	102,	129
23. Задача о польском национальном флаге ..	60,	102,	130
24. Раскрашивание шахматной доски	60,	102,	131
25. Лучшее время для жизни	61,	102,	132
26. Тьюринг в списке	61,	102,	133
27. Игра «Икосиан»	62,	102,	133
28. Обвести фигуру	62,	103,	134
29. Ещё раз о магическом квадрате	62,	103,	136
30. Ломание палки	63,	103,	138
31. Трюк с тремя стопками карт	63,	103,	138
32. Турнир на выбывание	63,	103,	139
33. Магия и псевдомагия	63,	103,	140
34. Монеты на звезде	64,	103,	141

35. Три кувшина	64, 103, 143
36. Ограниченное разнообразие	64, 103, 144
37. Задача о $2n$ шашках	64, 103, 145
38. Замощение плитками тетрамино	65, 103, 147
39. Прогулки по клеточному полю	65, 103, 148
40. Перестановка четырёх коней	65, 103, 149
41. Круг света	66, 103, 150
42. Ещё раз о волке, козе и капусте	66, 104, 151
43. Расстановка чисел	66, 104, 152
44. Легче или тяжелее?	66, 104, 152
45. Самый короткий путь коня	67, 104, 153
46. Фишки трёх цветов	67, 104, 154
47. Планировка выставки	67, 104, 155
48. Макнаггет-числа	67, 104, 156
49. Миссионеры и каннибалы	68, 104, 157
50. Последний шар	68, 104, 158
51. Недостающее число	68, 104, 159
52. Подсчёт треугольников	68, 104, 160
53. Определение фальшивой монеты с помощью электронных весов	69, 104, 161
54. Разрезание прямоугольника	69, 104, 161
55. Головоломка «Одометр»	69, 105, 162
56. Строй новобранцев	69, 105, 163
57. Задача Фибоначчи о кроликах	70, 105, 164
58. Сортируем раз, сортируем два... ..	70, 105, 165
59. Шапки двух цветов	70, 105, 166
60. Переделка треугольника из монеток в квадрат	71, 105, 167
61. Шашки на диагонали	71, 105, 169
62. Робот собирает монетки	71, 105, 171
63. Плюсы и минусы	71, 105, 172
64. Восьмиугольники	72, 105, 173
65. Угадывание кода	72, 105, 174
66. Оставшееся число	72, 106, 175
67. Разливаем пополам	72, 106, 176
68. Сумма цифр	73, 106, 177
69. Фишки на секторах круга	73, 106, 178
70. Прыжки в пары — 1	73, 106, 179
71. Помеченные ячейки — 1	73, 106, 179
72. Помеченные ячейки — 2	74, 106, 181

73. Погоня за петухом	74,	106,	182
74. Выбор места	74,	106,	184
75. Инспекция бензоколонок	75,	106,	185
76. Быстрая ладья	75,	106,	187
77. Поиск закономерности	75,	106,	188
78. Замоещение прямыми тримино	76,	106,	189
79. Дверцы шкафчиков	76,	106,	190
80. Прогулка принца	76,	107,	191
81. Ещё раз о задаче о знаменитости	76,	107,	192
82. Вверх орлом	77,	107,	193
83. Ханойская башня с ограничением	77,	107,	193
84. Сортируем блины	77,	107,	196
85. Распространение сплетен — 1	78,	107,	199
86. Распространение сплетен — 2	78,	107,	199
87. Перевернутые стаканы	78,	107,	200
88. Жабы и лягушки	78,	107,	201
89. Перестановка фишек	79,	107,	203
90. Пересаживания	80,	107,	204
91. Горизонтальные и вертикальные домино .	80,	107,	205
92. Замоещение трапециями	80,	108,	206
93. Стрельба по линкору	80,	108,	209
94. Поиск в отсортированном массиве	81,	108,	210
95. Максимальный и минимальный вес	81,	108,	211
96. Замоещение лестницы	81,	108,	212
97. Обмен в колоде карт	81,	108,	215
98. Ромбопалиндром	82,	108,	216
99. Обратная сортировка	82,	108,	217
100. Куда доскачет конь	83,	108,	218
101. Перекраска комнат	83,	108,	220
102. Обезьянка и кокосовые орехи	83,	108,	220
103. Прыжки на другую сторону	84,	108,	222
104. Разделение кучи фишек	84,	108,	222
105. Головоломка «MU»	85,	108,	225
106. Лампочка и переключатели	85,	108,	225
107. Лиса и заяц	85,	108,	227
108. Самый длинный путь	86,	109,	228
109. Домино «дубль-п»	86,	109,	229
110. Хамелеоны	86,	109,	231
111. Переворачивание треугольника из моне- ток	87,	109,	232

112. Снова о покрытии домино	87, 109, 236
113. Исчезающие монеты	87, 109, 237
114. Обход точек	88, 109, 239
115. Задача Баше о гирях	88, 109, 239
116. Подсчёт «пустых номеров»	89, 109, 242
117. Одномерный солитёр	89, 109, 245
118. Шесть коней	89, 109, 246
119. Замоещение цветными тримино	90, 110, 248
120. Машина, распределяющая пенни	90, 110, 250
121. Проверка супер-яйца	90, 110, 251
122. Мир в парламенте	90, 110, 252
123. Задача о флаге Нидерландов	91, 110, 253
124. Разделение цепочки	91, 110, 254
125. Отсортировать 5 за 7	91, 110, 256
126. Деление пирога по-честному	91, 110, 258
127. Задача о ходе коня	91, 110, 259
128. Тумблеры системы охраны	91, 110, 260
129. Головоломка Реве	92, 110, 262
130. Отравленное вино	92, 110, 264
131. Задача о шашках Тэта	92, 111, 266
132. Солдаты Конвея	93, 111, 268
133. Игра «Жизнь»	93, 111, 271
134. Раскраска точек	94, 111, 272
135. Разные пары	94, 111, 273
136. Поимка шпиона	95, 111, 274
137. Прыжки в пары — 2	95, 111, 276
138. Делёж конфет	95, 111, 278
139. Круглый Стол короля Артура	96, 111, 279
140. Снова задача об n ферзях	96, 111, 280
141. Задача Иосифа Флавия	96, 111, 283
142. Двенадцать монет	96, 112, 285
143. Заражённая шахматная доска	96, 112, 287
144. Разрушение квадратов	97, 112, 288
145. Пятнашки	97, 112, 290
146. Стрельба по движущейся мишени	97, 112, 292
147. Шапки с номерами	98, 112, 294
148. Свобода за одну монету	98, 112, 295
149. Распространение камушков	99, 112, 297
150. Болгарский пасьянс	99, 112, 300

ГОЛОВОЛОМКА В КАЧЕСТВЕ ЭПИГРАФА: КТО ЭТО СКАЗАЛ!

Определите, какому автору из перечисленных ниже принадлежат эти цитаты.

Человек с молотком подходит к каждой проблеме, как к забиванию гвоздей. Большой молоток нашего века — это алгоритм.

Решение задач — это практический навык, как, скажем, плавание. Все практические навыки мы приобретаем с помощью подражания и практики.

Нет лучшего способа развеять скуку, как ввести в курс интересные темы и элементы развлечения — игру, юмор, красоту и сюрприз.

Не само знание, но процесс обучения, не обладание, но движение к цели, — вот что гарантирует настоящее наслаждение.

Если я случайно упустил что-нибудь более или менее уместное или необходимое, я прошу снисходительности, поскольку нет ни одного человека, который совершенно безупречен и предусмотрителен по отношению ко всем вещам.

Уильям Паундстоун,
автор книги «Как сдвинуть гору Фудзи? Подходы ведущих мировых компаний к поиску талантов».

Дьёрдь Поиа (1887–1985),
выдающийся венгерский математик, автор книги «Как решать задачу», классической книги по решению задач.

Мартин Гарднер (1914–2010),
американский писатель, особенно хорошо известный по рубрике «Математические игры» в журнале *Scientific American* и книгам по занимательной математике.

Карл Фридрих Гаусс (1777–1855),
великий немецкий математик.

Леонардо Пизанский (Фибоначчи) (1170–ок. 1250),
выдающийся итальянский математик, автор *Liber Abaci* («Книга абака»), одной из важнейших книг по математике в истории.

УЧЕБНЫЙ РАЗДЕЛ

ОБЩИЕ СТРАТЕГИИ РАЗРАБОТКИ АЛГОРИТМОВ

Цель данного раздела — дать краткий обзор общих стратегий разработки алгоритмов. Хотя каждая из этих стратегий применима не ко всем головоломкам, все вместе они представляют собой мощный набор средств. Неудивительно, что эти стратегии используются также для решения многих задач в информатике. Таким образом, обучение тому, как применять эти стратегии к решению головоломок, может служить прекрасным введением в эту важную область.

Прежде чем мы приступим к рассмотрению основных стратегий разработки алгоритмов, нужно сделать важное замечание о двух типах алгоритмических головоломок. В каждой головоломке есть входные данные, по которым определяется, о каком *случае* задачи идёт речь. Случай может быть либо частным (например, найти фальшивую монету среди восьми монет с помощью взвешивания) или общим (например, найти фальшивую монету среди n монет путём взвешивания). Если читатель имеет дело с частным случаем головоломки, он не обязан решать её для общего случая. Иногда другие случаи имеют другое решение или даже вообще не имеют решения. Но с другой стороны, конкретное число в формулировке головоломки может вовсе не иметь никакого значения. Тогда решение головоломки для общего случая не только принесёт большее удовлетворение, но может оказаться проще. Но, независимо от того, задана ли головоломка для частного случая или в общей форме, всегда полезно решить её для нескольких простых случаев. Иногда это может навести читателя на неверный путь, но гораздо чаще будет способствовать более глубокому пониманию задачи.

Полный перебор

Теоретически многие головоломки можно решить с помощью полного перебора — стратегии решения задач, при которой в условие задачи просто подставляются все возможные варианты решения, пока решение не будет найдено. При применении полного перебора обычно не нужно много изобретательности. Поэтому человеку (в отличие от компьютера) редко

предлагают решить головоломку таким способом. При применении полного перебора самым главным ограничением является его неэффективность: как правило, число возможных вариантов, которые надо перебрать, растёт по меньшей мере экспоненциально с увеличением размера задачи, тем самым делая такой подход нецелесообразным не только для человека, но и для компьютера. В качестве примера рассмотрим задачу построения *магического квадрата* третьего порядка.

?	?	?
?	?	?
?	?	?

Рис. 1.1. Таблица 3×3 , которую нужно заполнить целыми числами от 1 до 9, чтобы получился магический квадрат

Магический квадрат. Заполните таблицу 3×3 девятью различными целыми числами от 1 до 9 так, чтобы сумма чисел в каждой строке, каждом столбце и двух главных диагоналях была одинакова (рис. 1.1).

Сколькими способами можно заполнить такую таблицу? Допустим, мы ставим за один раз одно число, сначала поставим где-нибудь 1, а в самом конце — 9. Есть девять способов поставить 1, восемь способов поставить 2 и т. д.; последнюю цифру 9 можно поставить в единственную оставшуюся свободной ячейку в таблице. Таким образом, существует $9! = 9 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 1 = 362\,880$ способов разместить девять чисел в таблице 3×3 . (Мы только что использовали стандартное обозначение $n!$, называемое *n факториал*, для произведения последовательных целых чисел от 1 до n .) Таким образом, если решать эту задачу путём полного перебора, пришлось бы расставить числа от 1 до 9 в таблице 362 880 возможными способами и для каждого случая проверить, не является ли сумма в каждой строке, столбце и главной диагонали одинаковой. Такой объём работы вне сомнения невозможно сделать вручную.

На самом деле, нетрудно решить эту головоломку, доказав сначала, что значение суммы равняется 15 и что нужно поместить 5 в центральную ячейку (см. головоломку «Ещё раз о магическом квадрате», № 29 в основном разделе книги). Кроме того, можно воспользоваться несколькими известными алгоритмами построения магических квадратов произвольного порядка $n \geq 3$, что особенно эффективно для нечётных n (см., например, [Pic02]). Конечно же, эти алгоритмы не основаны на полном переборе: количество вариантов

решения, которое нужно проверить перебором, становится непомерно большим уже для n , равного всего лишь 5. Действительно, $(5^2)! \cong 1,5 \cdot 10^{25}$ и, следовательно, компьютеру, который делает 10 триллионов операций в секунду, понадобится около 49 000 лет, чтобы закончить работу.

Поиск с возвратом

В методе полного перебора есть две основные проблемы. Первая заключается в механизме определения всех возможных вариантов решения. Для некоторых задач мы можем составить хорошо структурированный набор вариантов. Например, варианты расстановки первых девяти положительных целых чисел в ячейках таблицы 3×3 (см. выше пример «Магического квадрата») можно получить с помощью перестановок этих чисел; для поиска же всех перестановок известно несколько алгоритмов. Однако во многих задачах варианты решения не образуют такую регулярную структуру. Вторая, и более сложная, проблема заключается в количестве вариантов, которые нужно проверить. Как правило, это количество растёт по крайней мере экспоненциально с увеличением размера задачи. Поэтому полный перебор разумно применять только для задач маленького размера.

Поиск с возвратом гораздо лучше по сравнению с примитивным «лобовым» подходом полного перебора. Это удобный метод сгенерировать возможные варианты решения, при этом исключая ненужные варианты. Главная его идея состоит в том, чтобы построить варианты решения по принципу «один компонент за один раз» и оценить такие частично построенные варианты решения следующим образом: если такой частично построенный вариант не нарушает ограничений задачи, то далее подбирается первый из допустимых вариантов для следующего компонента решения. Если для следующего компонента нет допустимого варианта, то не нужно рассматривать варианты ни для какого из оставшихся компонентов. В таком случае алгоритм возвращается на предыдущий шаг и заменяет последний компонент частично построенного решения на следующий из возможных вариантов.

Поиск с возвратом, в принципе, предполагает отсечение определённого количества неверных вариантов — чем больше это количество, тем быстрее алгоритм находит решение. В худшем варианте поиск с возвратом может в итоге

сгенерировать такое же количество вариантов решения, как и полный перебор, но это происходит редко.

Поиск с возвратом можно интерпретировать как процесс построения дерева, на котором видны принимаемые решения. В компьютерных науках термин «дерево» используется для описания иерархических структур (например, генеалогическое древо, организационные схемы). *Дерево* обычно изображают следующим образом: *корень* (единственная узловая точка без *родителей*) сверху, а его *листья* (узлы без *детей*) — внизу диаграммы. Это просто удобное общепринятое изображение. Для перебора с возвратом такое дерево называется *деревом пространства состояний*. Корень этого дерева соответствует началу процесса построения решения; мы считаем, что корень — нулевой уровень дерева. Дети корня — на первом уровне дерева — соответствуют возможным вариантам выбора первого компонента решения (например, ячейка в магическом квадрате содержит 1). Их дети — узлы на втором уровне — соответствуют возможным вариантам следующего компонента решения, и т. д. Листья могут быть двух видов. Первый вид — *бесперспективные узлы*, или *тупики* — представляют частично построенный вариант, который не ведёт к окончательному решению. Установив, что данный узел бесперспективен, алгоритм перебора с возвратом закрывает его (часть дерева обрывается), отменяет решение о последнем компоненте, возвращается обратно к *родителю* бесперспективного узла и рассматривает другой вариант выбора для этого компонента. Второй вид листьев даёт решение задачи. Если достаточно одного решения, алгоритм останавливается. Если нужны ещё решения, алгоритм продолжает поиск, возвращаясь к родителю листа.

Следующий пример является классическим для иллюстрации применения поиска с возвратом для конкретной задачи.

Задача об n ферзях. Разместите n ферзей на шахматной доске $n \times n$ таким образом, чтобы ни один из них не находился под боем другого. (Один ферзь бьёт другого, если находится с ним на одной линии по вертикали, горизонтали или диагонали.)

При $n = 1$ задача имеет тривиальное решение, и легко увидеть, что при $n = 2$ и $n = 3$ решения нет. Поэтому рассмотрим задачу о 4 ферзях и решим её с помощью поиска с возвратом. Поскольку каждого из четырёх ферзей нужно поместить на свою вертикаль, всё, что нам необходимо сделать, — определить для каждого ферзя клетку по горизонтали шахматной доски, показанной на рис. 1.2.

Начнём с пустой доски и поставим ферзя 1 в первую возможную позицию — позицию на горизонтали 1 и на вертикали 1. Затем ставим ферзя 2: после неуспешных попыток поставить его на горизонталях 1 и 2 и на второй вертикали помещаем его в первую возможную позицию — на клетку (3, 2), т. е. клетку на горизонтали 3 и на вертикали 2. Это оказывается тупиком, поскольку для ферзя 3 нет подходящей позиции на вертикали 3. Поэтому алгоритм возвращается назад и размещает ферзя 2 в следующую возможную позицию (4, 2). Затем ферзь 3 ставится на клетку (2, 3), что также оказывается тупиком. Алгоритм возвращается назад на все шаги к ферзю 1 и размещает его в позицию (2, 1). Ферзь 2 затем идёт на (4, 2), ферзь 3 на (1, 3) и ферзь 4 на (3, 4), что даёт решение задачи. Дерево пространства состояний данного поиска показано на рис. 1.3.

Если необходимо найти другие решения (а для задачи о 4 ферзях есть ещё одно решение), алгоритм просто возобновляет свои шаги с того листа дерева состояний, на котором он был остановлен. В качестве альтернативы для поиска второго решения в данном случае можно использовать симметричность доски.

Насколько быстрее можно найти решение с помощью поиска с возвратом по сравнению с полным перебором? Количество всех возможных позиций для четырёх ферзей на четырёх различных клетках доски 4×4 равно

$$\frac{16!}{4!(16-4)!} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 1820.$$

Это общая формула, описывающая количество способов, которыми можно выбрать k различных элементов (неважно, в каком порядке) из множества n различных элементов. Это количество называется *сочетанием* из n по k , обозначается $\binom{n}{k}$ или $C(n, k)$ и равно $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Если мы рассмотрим размещение ферзей только в различных колонках доски, общее количество возможных решений уменьшается до $4^4 = 256$. Если мы ещё добавим ограничение, что ферзи должны быть и в различных позициях по

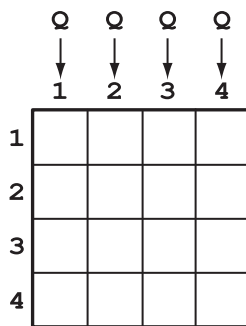


Рис. 1.2. Задача о 4 ферзях на шахматной доске

Конец ознакомительного фрагмента.

Приобрести книгу можно
в интернет-магазине «Электронный универс»
(e-Univers.ru)